·统计、测量与方法·

正则化结构方程模型：探索性和验证性分析的平衡 *

王思懿 [1] 邓雅婷 [1] 张沥今 [2] 郑舒方 [1] 潘俊豪 [**1]
（[1] 中山大学心理学系，广州，510006）
（[2] Graduate School of Education, Stanford University, Stanford, CA）

摘 要 结构方程模型作为一种验证性的方法，难以同时实现良好的模型拟合和模型简约性，容易出现模型误设的问题；而基于数据驱动的探索性方法则有着较高的 I 类错误率，易将冗余参数纳入模型中。结合机器学习正则化方法与结构方程模型开发的正则化结构方程模型，能够弥补传统方法的局限。并且随着数据采集技术的发展，正则化结构方程模型对高维数据具有相当大的应用价值。研究主要对频率学派和贝叶斯学派框架下正则化结构方程模型的方法原理、研究进展和应用进行介绍，希望对该方法在心理学研究中的应用起到推动作用。

关键词 正则化 结构方程模型 频率学派正则化 贝叶斯正则化

1 引言

结构方程模型（structural equation modeling, SEM）是心理学领域处理潜变量之间“因果效应”最为常用的统计方法之一。SEM 的多种优势使其在心理学研究中占据独特且重要的地位。传统的 SEM 分析通常是验证性的，即基于已有的理论和知识，构建（潜）变量间的关系或是对特定参数进行约束（Lindstrøm & Dahl, 2020）。尽管 SEM 的应用十分普遍，对模型进行约束也有利于得到较为简单、易于解释的模型（Jacobucci et al., 2016），但由于人类行为的复杂性，对模型进行过多的参数限制可能会出现模型误设的问题，进而导致拟合程度降低和参数估计偏差（Hsu et al., 2014; Yuan et al., 2003）。虽然研究者也可以使用事后修正（post hoc modification）的方法来改善模型拟合度，但是该方法存在过程繁琐、无法产生全局最优解、无法保证得到正定协方差矩阵等问题（Pan et al., 2017）。在新研究领域缺乏理论支持时，验证性 SEM 的效果可能会受到限制（Huang et al., 2017）。因此，研究者还需要结合探索性分析，以数据驱动的方式寻找与数据更为契合的模型。其中一种基于 SEM 的探索性分析方法是探索性结构方程模型（exploratory structural equation modeling, ESEM; Asparouhov & Muthén, 2009），ESEM 将探索性因子分析（exploratory factor analysis, EFA）方法运用于测量模型，在一定程度上改善了因模型参数限制过于严格而导致的问题。然而，ESEM 有着较高的 I 类错误率，容易将冗余参数纳入模型，增加模型复杂度，进而损害其可泛化性（generalizability）和可解释性（Huang et al., 2017; Mai et al., 2018）。

为提高模型的泛化能力，研究者开始尝试将机器学习领域的正则化（regularization）方法与计量心理学领域的 SEM 相结合，提出了正则化 SEM（regularized SEM）。正则化 SEM 同时具备正则化方法和 SEM 的特点，有着相当广阔的应用前景（Asparouhov & Muthén, 2024）。一方面，由于正则化方法的特性，正则化 SEM 能够数据驱动地对参数进行压缩和估计，从而得到较为简约的、更易解释且拟合较好的模型；另一方面，SEM 能灵活地构

* 本研究得到教育部人文社会科学研究规划基金项目 (23YJA190007)、中山大学高校基本科研业务费创新人才培育计划项目 (24wklj04) 和广州市科技计划项目 (2024A04J3277) 的资助。
** 通讯作者：潘俊豪，E-mail: panjunh@mail.sysu.edu.cn
DOI:10.16719/j.cnki.1671-6981.20260218

建结构模型中变量之间的关系，这就允许研究者将正则化方法用于不同的模型，自主选择特定参数进行正则化的操作（即参数惩罚）。这意味着在从限制模型到自由模型的连续体中，正则化 SEM 可以帮助研究者找到一个平衡点。

目前，正则化 SEM 相关的研究在方法学领域已有一定的进展,但在实证研究中的应用还有待推广。本文将分别对频率学派和贝叶斯学派框架下的正则化 SEM 方法原理（相关表达式可见附录 1、2，见《心理科学》官网）、研究进展和应用进行介绍（下文将频率学派正则化 SEM 简称为 RSEM，贝叶斯正则化 SEM 简称为 BRSEM）。同时本文将二者进行总结和比较，并且在附录 3（见《心理科学》官网）中整理了当前可实现正则化 SEM 的软件和程序包”。最后，本文对正则化 SEM 在心理学研究中所能发挥的作用展开讨论。

2 频率学派正则化结构方程模型

2.1 频率学派正则化结构方程模型简介

频率学派 RSEM 的思想最早来源于线性回归中的正则化方法。在线性回归中，如若模型过于复杂可能会产生过拟合问题（McNeish, 2015），继而损害模型的泛化能力。正则化方法正是用于避免过拟合问题的方法（Rish & Grabarnik, 2014）。它通过为线性回归的最小二乘估计目标函数添加一个惩罚项，实现了压缩参数估计、提高估计稳定性的目的，进而提高模型的泛化能力。不同的惩罚函数对应着不同的正则化方法，也就有着不同的功能和特性。目前较为常用的正则化方法有 Ridge（Hoerl & Kennard, 1970）、Lasso（Tibshirani, 1996）和弹性网络（elastic net; Zou & Hastie, 2005）。

近年来，研究者将正则化方法从线性回归扩展至 SEM，提出了 RSEM 的方法（Huang et al., 2017; Tibshirani, 1996）。通过 RSEM，研究者能够估计稀疏模型（sparse model），并解决 SEM 中大规模变量的选择问题（Jacobucci et al., 2019）。RSEM 的原理是将惩罚函数引入频率学派 SEM 的最大似然估计拟合函数，其参数估计通过最小化如下拟合函数求得：

$$F = \log(|\Sigma|) + tr(C * \Sigma^{-1}) - \log(|C|) - p + P(\cdot) \quad (1)$$

其中Σ为模型隐含的协方差矩阵，C为观测数据的协方差矩阵，p为观测变量的数目。$P(\cdot) = \sum_i \rho(\theta_i, \lambda)$为惩罚项，其中$\rho(\theta_i, \lambda)$为针对参数$\theta_i$的惩罚函数，而$\lambda$是用于调整惩罚力度的调整参数（tuning parameter）。因为是对最大似然函数进行惩罚，所以有研究者将该方法称为惩罚似然法（Huang et al., 2017）。

2.2 频率学派正则化结构方程模型的应用

2.2.1 正则化探索性因子分析

EFA 是探索数据背后的潜在因子结构的一种重要方法。在 EFA 中，获得因子载荷的初步估计值之后一般还需要进行因子旋转，以便得到更易解释的因子结构（Mulaik, 2009）。然而，因子旋转方法的选择存在易受研究者主观影响、无法有效地剔除“冗余”参数等局限（Jin et al., 2018; Scharf & Nestler, 2019）。有研究者将正则化应用于 EFA，以作为因子旋转的替代或补充（Hirose & Konishi, 2012; Jung & Lee, 2011; Trendafilov, 2014）。其基本思想是使用惩罚函数对因子载荷参数进行压缩（即使用因子载荷参数构建$\boldsymbol{\theta}$），如 Lasso（Ning & Georgiou, 2011）、自适应 Lasso（Choi et al., 2010）、SCAD（smoothly clipped absolute deviation; Hirose & Yamamoto, 2015）等。如果参数压缩至 0，那么就能将效应微小的冗余参数从模型中剔除，进而得到较易解释的稀疏结构。例如，Goretzko（2023）利用正则化 EFA 以便捷的方式探索了亲社会性量表的因子结构。

相比于因子旋转的方法，正则化 EFA 主要有以下优势（Goretzko, 2023; Scharf & Nestler, 2019）：（1）正则化 EFA 的易用性较高，已有研究表明弹性网络的总体表现好于 Ridge 和 Lasso，因此在大部分情况下可优先考虑使用弹性网络；（2）正则化 EFA 的惩罚函数的调整参数可以通过客观的指标（信息准则和交叉验证的结果）选取，避免了研究者主观性的影响；（3）当总体模型结构较为简单时，正则化 EFA 能较好地还原模型的结构；当存在复杂的总体结构时，正则化 EFA 则能提供较简约的模型结构，正则化 EFA 能够在上述两种情况之间达到较好的平衡；（4）在大部分情况下，正则化 EFA 表现媲美因子旋转方法。

2.2.2 正则化中介模型

中介分析是社会科学领域应用最广泛的方法之一（温忠麟等，2024），一个典型的多重并行中介模型如图 1 所示。将正则化方法用于多重并行中介模型能实现对潜在中介变量的探索性选择，即从中介变量集合中数据驱动地筛选潜在中介变量（Serang et al., 2017）。当在新研究领域中研究者难以找到足够的理论来指导和支持假设的中介模型，或是当使用验证性分析的方法分析“样本 - 变量数”比例小的模型而导致过拟合问题、有偏估计，甚至出现参数估计无法收敛的问题时（McNeish, 2015; van Kesteren & Oberski, 2019），探索性中介分析可进行较好的处理。

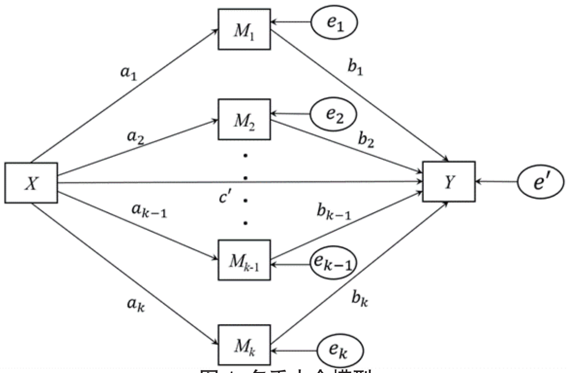

图 1 多重中介模型

注：X 为自变量，Y 为因变量，M 为中介变量，e 为测量误差，a 和 b 分别为中介路径的前、后半路径系数。

Serang 等人（2017）利用 Lasso 的变量选择特性，提出了基于正则化的探索性中介分析方法 ——XMed（exploratory mediation analysis via regularization）。XMed 首先用 Lasso 的惩罚函数对模型中所有待选择的中介变量 a, b 的参数进行惩罚（如果有理论表明某些变量可以作为中介变量，可以选择不对这些变量进行惩罚）。当某一变量的 a, b 路径（或其中之一）被压缩至 0，说明该变量作为噪声变量被剔除，剩下的变量则被选为潜在的中介变量。然而，Lasso 促使所有参数估计向 0 收缩，为了得到更准确的参数估计，研究者还需要进行第二阶段的分析，即在多重中介模型中仅纳入被选择的中介变量，不带惩罚地进行估计（即调整参数 $\lambda = 0$）。模拟研究表明，XMed 比基于显著性的探索性中介分析方法有着更高的检验力，也更适用于探索性分析的情景（Serang et al., 2017; Serang & Jacobucci, 2020）。目前 XMed 不仅能用于变量都为连续变量的情况，也能够用于中介变量和因变量中存在二分变量的数据集，但都仅限于显变量（Serang & Jacobucci, 2020）。在实证研究方面，Ammerman 等人（2018）曾使用 XMed 从与人际关系、风险行为、心理病理症状和自杀行为接触相关的 46 个变量中，探索存在于儿童时期虐待经历和青春期自杀尝试之间的潜在中介变量。结果发现，在女性样本中，是否接受过心理咨询服务、是否拥有试图自杀的朋友、父母关系质量等 11 个变量起到中介作用，而 46 个变量在男性样本中都没有起到中介作用。

2.2.3 正则化 MIMIC 模型（multiple–indicators, multiple–causes models）

正则化方法也可以在 MIMIC 模型中实现变量选择。在 MIMIC 模型中，潜变量被多个观测指标所测量，同时又被多个协变量所预测，因此 MIMIC 模型又被称为带协变量的 CFA 模型（Brown, 2015），如图 2 所示。

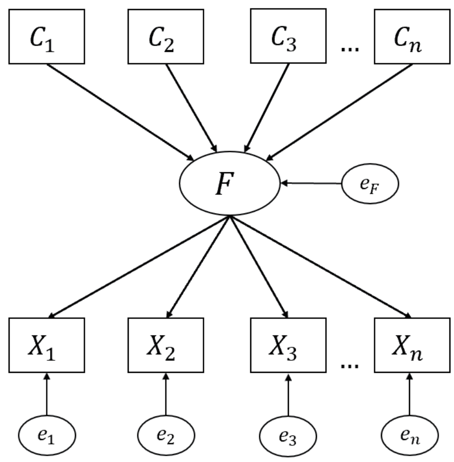

图 2 MIMIC 模型

注：C 为协变量，X 为观测变量，F 为潜变量，e 为测量误差。

与正则化中介模型相似，正则化 MIMIC 模型也通过惩罚特定参数来达到协变量选择的目的（Jacobucci et al., 2016, 2019）。具体而言，正则化 MIMIC 模型使用 Lasso 或弹性网络对潜变量和协变量之间的路径系数进行惩罚，如果路径系数被压缩至 0，说明相对应的协变量将作为冗余变量被剔除。也有研究者在 MIMIC 模型中对残差协方差施加惩罚以改善测量模型的拟合（Li & Jacobucci, 2022）。相比于传统方法，正则化 MIMIC 的优势在于它将 SEM 的验证性功能和正则化的探索性变量选择功能相结合（Jacobucci et al., 2019），对于基因学、认知神经科学、流行病学等容易出现高维数据集的领域，

正则化 MIMIC 模型具有相当大的应用前景。已有研究者通过整合稳定性选择（stability selection）与正则化 MIMIC 模型的方法，在人格数据分析中改善了模型拟合，同时模型稳定性良好（Li & Jacobucci, 2022）。研究者还使用正则化 MIMIC 模型对幸福感量表进行测量不变性分析，发现韩国和加拿大两个国家的幸福感概念存在差异（Joshanloo, 2025）。还有研究者将正则化 MIMIC 模型应用于脑成像数据，将 11 个与大脑白质结构相关的磁共振成像活动水平作为协变量,预测流体智力和晶体智力两个潜变量，并使用弹性网络的方法惩罚协变量 - 潜变量之间的预测路径，以期能找到与晶体和流体智力相关的大脑区域（Góngora et al., 2020）。结果发现，胼胝体小钳（forceps minor）活动水平→晶体智力、上纵束（superior longitudinal fasciculus）活动水平→流体智力、年龄→晶体智力、年龄→流体智力这四条预测路径是非零的，说明个体的认知水平可能和年龄以及上述大脑结构有关。

2.2.4 正则化多组模型

多组模型较为广泛的应用之一是检验测量不变性假设，以用于检验量表在不同次测量中是否具有一致性或使潜变量可以进行跨组比较（Millsap, 2012）。如何使用传统的多组分析进行测量不变性检验可参考 Putnick 和 Bornstein（2016）。使用正则化多组分析进行测量不变性检验时，研究者首先需要选定一个参照组，然后对参照组和其它组的跨组差异进行惩罚，如果某个参数的跨组差异被压缩为 0，说明该参数是跨组等值的（Huang, 2018; Lindstrøm & Dahl, 2020）。需要说明的是，在进行测量不变性检验时，正则化多组分析虽较传统的多组分析更简便，也更适用于探索性的情景，但不能替代传统的多组分析的方法,只可作为其一种补充。

除了用于检验测量不变性，正则化多组模型也可用于检验跨组差异并提供差异大小，其思路与正则化多组分析进行测量不变性检验相似，通过将选定的参照组与其他组的跨组差异进行惩罚，如若跨组差异被压缩为 0 则说明不存在组别差异（Lindstrøm & Dahl, 2020）。使用正则化多组模型进行跨组差异比较的好处在于参数被压缩的量可通过调节参数进行调整，而不是直接约束为某一等值，使得模型的泛化能力提升，并且压缩过程可较为便捷地由数据驱动进行调优（如交叉验证）。Lindstrøm 和 Dahl（2020）曾使用正则化多组分析的方法来探讨政治利益和政治参与这两个潜变量对选民的决策容易性（指个体认为有多容易能做出投票决策）的预测是否存在性别差异。研究者以男性样本作为参照组，使用 Lasso 对参数跨组差异进行压缩。结果发现，除了政治参与→决策容易性这一路径参数，几乎所有参数跨组差异都被压缩为 0，说明政治参与→决策容易性可能存在较大的性别差异。研究者还使用了传统最大似然估计进行了多组分析（即不对参数差异进行惩罚），发现男性和女性样本在政治参与→决策容易性这一路径效应的差异大小为 .07。

3 贝叶斯正则化结构方程模型

3.1 贝叶斯正则化结构方程模型简介

传统的 SEM 主要在频率学派的框架下进行估计，因此正则化方法在 SEM 中的应用研究也更多地在频率学派的框架下展开（Jacobucci et al., 2019; Serang et al., 2017; Serang & Jacobucci, 2020; Trendafilov, 2014）。相比频率学派的方法，贝叶斯估计在小样本、复杂模型中具有较大的优势，且可结合有效的先验信息使未知参数估计更加准确（张沥今等, 2019; Holtmann et al., 2016; McNeish, 2016）。贝叶斯方法和频率学派方法的不同在于，频率学派将未知参数看作常数，根据样本参数估计总体参数；而贝叶斯方法则将未知参数视为随机变量，分析的目的是得到未知参数的后验分布（张沥今等，2019）。贝叶斯正则化通过对参数施加压缩先验（shrinkage priors），将较小的效应向 0 压缩（van Erp et al., 2019）。具体来说，前文中介绍的基于频率学派的正则化方法可以写作：

$$PL(\theta) = LL(\theta) + P(\cdot) \quad (2)$$

其中，$PL(\theta)$和$LL(\theta)$分别表示惩罚后和惩罚前的对数似然函数，其中$P(\cdot)$代表惩罚函数。而在贝叶斯框架下，对于模型M，参数θ的后验分布$p(\theta|y,M)$同时取决于其先验$p(\theta|M)$和似然函数$p(y|M,\theta)$，即有$p(\theta|y,M) \propto p(y|M,\theta) \times p(\theta|M)$。因此，对贝叶斯后验分布取对数之后可以写作：

$$\log\left(p(y|M,\theta)\right) + \log\left(p(\theta|M)\right) = LL(\theta) +$$

$$\mathrm{LPrior}(\theta) \qquad (3)$$

其中，$\mathrm{LPrior}(\theta)$表示取对数之后的先验分布。由此可见，在贝叶斯框架下，当对参数设定恰当的先验分布$\mathrm{LPrior}(\theta)$时，取对数之后的先验分布可以起到和频率学派下的惩罚项$P(\cdot)$类似的作用（Pan et al., 2017）。BRSEM 中不同的压缩先验有着不同的功能和特性，常见的方法有贝叶斯 Ridge 先验（均值为 0、方差极小的正态先验）、贝叶斯 Lasso 先验（双指数先验）、贝叶斯弹性网络。

3.2 贝叶斯正则化结构方程模型的应用

3.2.1 放宽对于传统因子分析的约束

随着 BRSEM 的发展，一些研究者开始关注其在 SEM 中的应用，从而放宽在模型中一些过于严苛的约束条件。例如，Muthén 和 Asparouhov（2012）对交叉负载的参数设定均值为 0、方差极小的正态先验分布（Ridge 先验）来达到正则化的效果，放宽了传统 CFA 将所有交叉负载固定为 0 的限制。再如 Lu 等人（2016）利用 SSP（spike-and-slab prior）代替传统 BSEM 中的 Ridge 先验，可以在一次估计中同时对因子负载达到变量选择和参数估计的目的。除了因子结构中的交叉负载，贝叶斯正则化还可以用于放宽对于协方差矩阵非对角线元素的限制。Pan 等人（2017）提出了针对 CFA 的贝叶斯协方差 Lasso（Bayesian covariance Lasso for CFA），对因子结构中残差的方差协方差矩阵的逆矩阵非对角线元素施加双指数分布来实现对残差相关的正则化，在避免了繁琐的事后模型修正的同时，保证了模型协方差矩阵的正定性。为了便于贝叶斯协方差 Lasso 在 CFA 中的运用，Zhang 等人（2021）进一步开发了 R 包 blcfa（Bayesian Lasso CFA），从而可实现一站式的模型修正。Pan 等人（2020）还进一步将贝叶斯 Lasso 和多层 CFA 模型相结合，放宽了传统多层 CFA 中对方差协方差矩阵的限制，允许个体内水平的残差方差协方差矩阵中存在非零的非对角线元素，从而可将因子结构的个体特异性纳入考虑。从便利量表开发的角度，Chen 等人（2021）利用贝叶斯 Lasso 同时放宽了传统频率学派对 CFA 交叉负载和残差相关方面的限制，提出了介于 CFA 和 EFA 的部分 CFA（partially confirmatory factor analysis, PCFA），允许研究者在验证性和探索性之间根据实际可获得的先验信息进行灵活建模。部分 CFA 还可以在多维项目反应理论框架下对分类数据进行建模。进一步，Chen（2023）提出一种双层贝叶斯正则化方法用于完全和部分 EFA，通过将因子和载荷分别视为组别和个体水平，实现稀疏模型的因子选择。

3.2.2 放宽对于不变性的约束

传统频率学派的方法对测量不变性的检验主要包括结构、载荷、截距的不变性等（Putnick & Bornstein, 2016）。然而，这些跨组不变性的限制在实际研究中往往不能被满足，需要采用事后模型修正来释放一些限制。这一过程十分繁琐，可能导致对跨组均值差异的有偏估计以及增加研究的 I 类错误率等（宋琼雅等，2021; Marsh et al., 2018）。为解决传统测量不变性检验的局限，Muthén 和 Asparouhov（2013）利用贝叶斯正则化提出了渐近测量不变性（approximate measurement invariance）的方法，通过对参数的跨组差异施加压缩先验，从而放宽传统方法对测量不变性的严格限制。如有研究者运用 BRSEM 对大学生职业价值观量表的测量不变性检验进行检验，该研究估计出了模型中的交叉载荷并允许模型中存在一定量的不等参数，从而放宽了测量不变性检验的严格限制（温聪聪，2025）。

除了对于跨组测量不变性的放宽，贝叶斯正则化还可以用于放宽对跨时间点的测量不变性的限制（Muthén & Asparouhov, 2013）。在对追踪数据的分析中，传统频率学派的估计需要限制测量模型的参数跨时间点等价，但这种限制在实际研究中很可能被违背，特别是在测量时间点较多的情况下。Liang 等人（2018）在多指标自回归交叉滞后模型（multiple-indicator autoregressive cross-lagged model, M-ARCL）的框架下，利用贝叶斯 Ridge 先验放宽了测量模型不随时间变化的限制，在考虑了因子结构可能随时间发生的变化后，M-ARCL 可以更准确地对模型中的自回归效应进行估计。

3.2.3 利用贝叶斯正则化筛选影响变量

一些研究者还利用贝叶斯正则化方法筛选多变量模型中的影响因素。如 Feng 等人（2017）结合贝叶斯自适应 Lasso 提出了多变量广义潜变量模型，可同时进行变量选择和参数估计。Kang 等人（2022）

运用贝叶斯 Lasso 处理高维数据以揭示脑部数据与行为之间的联系。张沥今（2022）运用贝叶斯正则化 MIMIC 模型进行协变量筛选，同时将贝叶斯正则化中介模型推广至可以处理潜变量的情况。在实际应用中，Jacobucci 和 Grimm（2018）在潜在增长曲线模型中使用贝叶斯正则化方法筛选对儿童阅读发展轨迹产生影响的协变量。考虑到实证研究中可能存在的交互效应、曲线关系等，Brandt 等人（2018）提出在 SEM 中利用 aBSS-lasso（adaptive Bayesian lasso approach with spike-and-slab priors）来识别可能存在的线性及非线性项的效应。模拟研究结果表明，传统的潜调节结构方程法以及非限制性的乘积指标法均容易受到数据本身的样本量、信度和多重共线性的影响。aBSS-lasso 的总体表现相对更优，特别是在参数本身真值为 0 的情况下，而且 aBSS-lasso 对模型参数有较高的压缩效率，是一个较好的变量选择工具（Brandt et al., 2018）。目前，贝叶斯正则化在 SEM 中的运用方面的研究还较为局限，未来可以进一步探讨贝叶斯正则化在 SEM 中更多的应用模式。

4 频率学派和贝叶斯正则化结构方程模型的比较

RSEM 与 BRSEM 本质的区别在于，在 RSEM 中，惩罚函数被添加到被最小化的拟合函数；而在 BRSEM 中，惩罚先验乘以数据的似然性以获得后验分布（van Erp, 2023）。在应用上它们都可以实现变量筛选（如中介变量、协变量等），并且可以平衡理论建模和非理论建模，以促进理论的发展。相较而言，BRSEM 在放宽传统因子分析的约束和不变性约束方面具有额外贡献，并且 BRSEM 在处理小样本数据和复杂模型有着明显优势。

在实际建模中，与频率学派正则化方法相比，贝叶斯正则化在 SEM 中具有更多优势：（1）可以对参数得到有效的标准误估计和区间估计（张沥今等，2020; Kyung et al., 2010）；（2）建模更加灵活，可放宽频率学派正则化方法的一些约束条件（Park & Casella, 2008）；（3）在复杂模型中表现更优，更不容易出现模型不收敛问题（Jacobucci & Grimm, 2018）；（4）可以直接对调整参数施加超先验进行估计，不需要进行繁琐的交叉验证的过程（Kyung et al., 2010）。而频率学派方法在简单模型上表现更佳，耗费的计算资源更少，因此有研究者认为在简单模型下应优先选择频率学派的正则化方法（Jacobucci & Grimm, 2018）。但在参数选择方面，一些贝叶斯正则化的压缩先验在变量选择和参数估计上的表现会较大程度受到先验设置的影响，而目前对先验设置还没有较为统一的意见（Piironen & Vehtari, 2017; Polson & Scott, 2011）。而频率学派的调整参数可根据客观标准进行选择，避免了贝叶斯正则化中先验选择的主观性。在软件实现方面，频率学派正则化的实现相较贝叶斯正则化更为便利，因而尽管贝叶斯正则化相比于频率学派正则化有着更多优势，但其应用和推广受限。

5 讨论

目前，正则化的技术已从线性回归扩展至更多的模型，如广义线性模型（Friedman et al., 2010）、网络分析（Epskamp et al., 2017）、项目反应理论模型（Cho et al., 2024; Sun et al., 2016）、线性混合效应模型（Adjakossa & Nuel, 2017）。然而，正则化在 SEM 的应用才刚刚起步。正则化 SEM 结合了正则化和 SEM 的优势，在心理学研究中具有非常广阔的应用前景。

正则化 SEM 平衡模型拟合和模型复杂性的特性,是传统验证性和探索性分析方法所无法做到的。正则化 SEM 一方面可通过将较小的系数向 0 压缩来得到比探索性分析更简约的模型，另一方面可通过数据驱动的参数压缩来得到比验证性分析的强约束模型更好的模型拟合。此外，正则化 SEM 具有更好的泛化能力，这在一定程度上有助于提高心理学研究的可重复性。正则化 SEM 打破了验证性和探索性分析两极分化的结构，构建了以验证性和探索性分析作为两端的连续谱,可作为一种“半验证性”的方法使用（Chen, 2023; Chen et al., 2021），在量表开发上有较大的应用价值。

具有变量选择特性的正则化方法（如 Lasso）在高维数据的分析上具有相当大的可行性。传统方法在模型纳入过多变量时容易出现参数估计不收敛的问题（van Kesteren & Oberski, 2019），而正则

化 SEM 能够高效地对数据进行降维，对变量集合进行精简，筛选出具有统计学意义的重要变量，特别是贝叶斯正则化 SEM 尤为擅长处理复杂模型（Jacobucci & Grimm, 2018）。随着数据采集技术的发展，有着成百甚至上千变量数的高维数据在心理学研究中也愈加常见，例如脑成像数据、基因测序数据、便携设备采集的追踪数据等，正则化 SEM 对高维数据的处理能力使其在未来的心理学研究中具备非常大的应用潜力。

正则化 SEM 还提供了模型选择的新视角，即通过参数压缩的方式进行模型修正和变量选择，而非通过考察传统的评价指标（如假设检验显著性，修正指数）。这一方法在因子分析、MIMIC 模型、中介模型等模型中已有所实践（Jacobucci et al., 2019; Pan et al., 2017; Serang et al., 2017）。然而，目前尚不明确基于参数压缩的方法相比于基于传统指标方法的优劣势。模拟研究表明，在中介模型中，基于正则化的中介变量选择方法的检验力要高于基于中介效应显著性选择的方法（Serang et al., 2017）。在因子分析的因子载荷选择上，传统的 BIC 拟合指标以及贝叶斯因子比贝叶斯 SSP 能更好地平衡虚报率（Lu et al., 2016）。在模型修正中，基于 Lasso 的频率学派正则化 SEM 表现也不如传统基于修正指数的方法（Yuan & Liu, 2021）。针对两种不同模型选择视角在方法表现上的不一致，未来需要更多正则化方法和传统方法比较的相关研究，以加深对两种方法的理解，为实证研究提供更合理的指导。

需要注意的是，研究者在选用正则化方法时，还需要注意偏差 - 方差权衡（bias-variance tradeoff）的问题。偏差 - 方差权衡指允许一定程度的参数估计偏差，来减小参数估计方差的一种权衡。如在线性回归中，传统的一般最小二乘回归的估计值与总体值更接近，但估计值的变异性更大，而 Ridge 回归则牺牲了一定的估计准确性来换取更小的估计变异性（Jacobucci et al., 2019）。本文中所提到的正则化 SEM 的方法应用大多更偏向于探索性分析，而在探索性分析中，研究者更看重效应是否存在以及结果是否具有更强的泛化能力（Jacobucci et al., 2019; Serang et al., 2017），因此牺牲一定的估计准确性来提升估计稳定性和泛化能力是可接受的。此外，如果研究者在探索阶段想要同时关注效应是否存在以及效应的大小，可以参考 XMed 中松弛 Lasso 的逻辑，在第一阶段使用正则化进行模型选择，在第二阶段使用传统方法获得参数估计（Serang et al., 2017）。

参考文献

宋琼雅，张沥今，潘俊豪. (2021). 贝叶斯多组比较——渐近测量不变性. *心理学探新*, *41*(1), 69–75.

张沥今. (2022) *贝叶斯正则化结构方程模型：以 MIMIC 模型和并行中介模型为例* (硕士学位论文). 中山大学，广州.

张沥今，魏夏琰，陆嘉琦，潘俊豪. (2020). Lasso 回归：从解释到预测. *心理科学进展*, *28*(10), 1777–1791.

张沥今，陆嘉琦，魏夏琰，潘俊豪. (2019). 贝叶斯结构方程模型及其研究现状. *心理科学进展*, *27*(11), 1812–1825.

温聪聪. (2025). 惩罚对齐法：测量不变性检验的新方法. *心理科学进展*, *33*(1), 176–196.

温忠麟，刘方，郑渊丹，廖心怡，黄亦南. (2024). 为何调节效应或中介效应的实证文章那么多？*应用心理学*, *30*(4), 291–297.

Adjakossa, E., & Nuel, G. (2017). *Fixed effects selection in the linear mixed-effects model using adaptive ridge procedure for L0 penalty performance.* arXiv.

Ammerman, B. A., Serang, S., Jacobucci, R., Burke, T. A., Alloy, L. B., & McCloskey, M. S. (2018). Exploratory analysis of mediators of the relationship between childhood maltreatment and suicidal behavior. *Journal of Adolescence, 69*(1), 103–112.

Asparouhov, T., & Muthén, B. (2009). Exploratory structural equation modeling. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal, 16*(3), 397–438.

Asparouhov, T., & Muthén, B. (2024). Penalized structural equation models. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal, 31*(3), 429–454.

Brandt, H., Cambria, J., & Kelava, A. (2018). An adaptive Bayesian Lasso approach with Spike-and-Slab Priors to identify multiple linear and nonlinear effects in structural equation models. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal, 25*(6), 946–960.

Brown, T. A. (2015). *Confirmatory factor analysis for applied research.* Guilford Publications.

Chen, J. (2023). Fully and partially exploratory factor analysis with bi-level Bayesian regularization. *Behavior Research Methods, 55*(4), 2125–2142.

Chen, J., Guo, Z., Zhang, L., & Pan, J. (2021). A partially confirmatory approach to scale development with the Bayesian Lasso. *Psychological Methods, 26*(2), 210–235.

Cho, A. E., Xiao, J., Wang, C., & Xu, G. (2024). Regularized variational estimation for exploratory item factor analysis. *Psychometrika, 89*(1), 347–375.

Choi, J., Oehlert, G., & Zou, H. (2010). A penalized maximum likelihood approach to sparse factor analysis. *Statistics and Its Interface, 3*(4), 429–436.

Epskamp, S., Rhemtulla, M., & Borsboom, D. (2017). Generalized network psychometrics: Combining network and latent variable models. *Psychometrika, 82*(4), 904–927.

Feng, X. N., Wu, H. T., & Song, X. Y. (2017). Bayesian regularized multivariate generalized latent variable models. *Structural Equation Modeling: A*

Multidisciplinary Journal, 24(3), 341–358.

Friedman, J., Hastie, T., & Tibshirani, R. (2010). Regularization paths for generalized linear models via coordinate descent. *Journal of Statistical Software, 33*(1), 1–22.

Góngora, D., Vega–Hernández, M., Jahanshahi, M., Valdés–Sosa, P. A., & Bringas–Vega, M. L. (2020). Crystallized and fluid intelligence are predicted by microstructure of specific white–matter tracts. *Human Brain Mapping, 41*(4), 906–916.

Goretzko, D. (2023). Regularized exploratory factor analysis as an alternative to factor rotation. *European Journal of Psychological Assessment, 41*(4), 264–276.

Hirose, K., & Konishi, S. (2012). Variable selection via the weighted group lasso for factor analysis models. *Canadian Journal of Statistics, 40*(2), 345–361.

Hirose, K., & Yamamoto, M. (2015). Sparse estimation via nonconcave penalized likelihood in factor analysis model. *Statistics and Computing, 25*(5), 863–875.

Hoerl, A. E., & Kennard, R. W. (1970). Ridge regression: Biased estimation for nonorthogonal problems. *Technometrics, 12*(1), 55–67.

Holtmann, J., Koch, T., Lochner, K., & Eid, M. (2016). A comparison of ML, WLSMV, and Bayesian methods for multilevel structural equation models in small samples: A simulation study. *Multivariate Behavioral Research, 51*(5), 661–680.

Hsu, H. Y., Skidmore, S. T., Li, Y., & Thompson, B. (2014). Forced zero cross–loading misspecifications in measurement component of structural equation models. *Methodology, 10*(4), 138–152.

Huang, P. H. (2017). *lsl: Latent structure learning* (R package version 0.5.6) [Computer software]. https: //CRAN.R–project.org/package=lsl

Huang, P. H. (2018). A penalized likelihood method for multi–group structural equation modelling. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 71*(3), 499–522.

Jacobucci, R., Brandmaier, A. M., & Kievit, R. A. (2019). A practical guide to variable selection in structural equation modeling by using regularized multiple–indicators, multiple–causes models. *Advances in Methods and Practices in Psychological Science, 2*(1), 55–76.

Jacobucci, R., & Grimm, K. J. (2018). Comparison of frequentist and Bayesian regularization in structural equation modeling. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal, 25*(4), 639–649.

Jacobucci, R., Grimm, K. J., & McArdle, J. J. (2016). Regularized structural equation modeling. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal, 23*(4), 555–566.

Jin, S., Moustaki, I., & Yang–Wallentin, F. (2018). Approximated penalized maximum likelihood for exploratory factor analysis: An orthogonal case. *Psychometrika, 83*(3), 628–649.

Joshanloo, M. (2025). Factor structure and measurement invariance of conceptions of happiness in Korea and Canada: An application of penalized structural equation modeling in Mplus. *Quality and Quantity, 59* (2), 1121–1142.

Jung, S., & Lee, S. (2011). Exploratory factor analysis for small samples. *Behavior Research Methods, 43*(3), 701–709.

Kang, I., Yi, W., & Turner, B. M. (2022). A regularization method for linking brain and behavior. *Psychological Methods, 27*(3), 400–425.

Kyung, M., Gill, J., Ghosh, M., & Casella, G. (2010). Penalized regression, standard errors, and Bayesian lassos. *Bayesian Analysis, 5*(2), 369–411.

Li, X., & Jacobucci, R. (2022). Regularized structural equation modeling with stability selection. *Psychological Methods, 27*(4), 497–518.

Liang, X., Yang, Y., & Huang, J. (2018). Evaluation of structural relationships in autoregressive cross–lagged models under longitudinal approximate invariance:A Bayesian analysis. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal, 25*(4), 558–572.

Lindstrøm, J. C., & Dahl, F. A. (2020). Model selection with lasso in multi–group structural equation models. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal, 27*(1), 33–42.

Lu, Z. H., Chow, S. M., & Loken, E. (2016). Bayesian factor analysis as a variable–selection problem: Alternative priors and consequences. *Multivariate Behavioral Research, 51*(4), 519–539.

Mai, Y., Zhang, Z., & Wen, Z. (2018). Comparing exploratory structural equation modeling and existing approaches for multiple regression with latent variables. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal, 25*(5), 737–749.

Marsh, H. W., Guo, J., Parker, P. D., Nagengast, B., Asparouhov, T., Muthén, B., & Dicke, T. (2018). What to do when scalar invariance fails: The extended alignment method for multi–group factor analysis comparison of latent means across many groups. *Psychological Methods, 23*(3), 524–545.

McNeish, D. (2016). On using Bayesian methods to address small sample problems. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal, 23*(5), 750–773.

McNeish, D. M. (2015). Using lasso for predictor selection and to assuage overfitting: A method long overlooked in behavioral sciences. *Multivariate Behavioral Research, 50*(5), 471–484.

Millsap, R. E. (2012). *Statistical approaches to measurement invariance.* Routledge eBooks.

Mulaik, S. A. (2009). *Foundations of factor analysis.* Chapman and Hall/CRC eBooks.

Muthén, B., & Asparouhov, T. (2012). Bayesian structural equation modeling: A more flexible representation of substantive theory. *Psychological Methods, 17*(3), 313–335.

Muthén, B., & Asparouhov, T. (2013). *BSEM measurement invariance analysis: Mplus Web Note 17*. http://www.statmodel.com/examples/webnotes/webnote17.pdf

Ning, L., & Georgiou, T. T. (2011). *Sparse factor analysis via likelihood and l1–regularization.* In 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, Institute of Electrical and Electronics Engineers.

Pan, J., Ip, E. H., & Dubé, L. (2017). An alternative to post hoc model modification in confirmatory factor analysis: *The Bayesian lasso. Psychological Methods, 22*(4), 687–704.

Pan, J., Ip, E. H., & Dubé, L. (2020). Multilevel heterogeneous factor analysis and application to ecological momentary assessment. *Psychometrika, 85*(1), 75–100.

Park, T., & Casella, G. (2008). The Bayesian lasso. *Journal of the American Statistical Association, 103*(482), 681–686.

Piironen, J., & Vehtari, A. (2017). Sparsity information and regularization in the horseshoe and other shrinkage priors. *Electronic Journal of Statistics, 11*(2), 5018–5051.

Polson, N. G., & Scott, J. G. (2011). *Shrink globally, act locally: Sparse Bayesian regularization and prediction*. Oxford University Press eBooks.

Putnick, D. L., & Bornstein, M. H. (2016). Measurement invariance conventions and reporting: The state of the art and future directions for psychological research. *Developmental Review, 41,* 71–90.

Rish, I., & Grabarnik, G. (2014). *Sparse modeling: Theory, algorithms, and applications.* CRC Press.

Scharf, F., & Nestler, S. (2019). Should regularization replace simple structure rotation in exploratory factor analysis? *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal, 26*(4), 576–590.

Serang, S., & Jacobucci, R. (2020). Exploratory mediation analysis of dichotomous outcomes via regularization. *Multivariate Behavioral Research, 55*(1), 69–86.

Serang, S., Jacobucci, R., Brimhall, K. C., & Grimm, K. J. (2017). Exploratory mediation analysis via regularization. S*tructural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal, 24*(5), 733–744.

Sun, J., Chen, Y., Liu, J., Ying, Z., & Xin, T. (2016). Latent variable selection for multidimensional item response theory models via L1 regularization. *Psychometrika, 81*(4), 921–939.

Tibshirani, R. (1996). Regression shrinkage and selection via the lasso. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological), 58*(1), 267–288.

Trendafilov, N. T. (2014). From simple structure to sparse components: A review. *Computational Statistics, 29*(3), 431–454.

van Erp, S. (2023). Bayesian regularized SEM: Current capabilities and constraints. *Psych, 5*(3), 814–835.

van Erp, S., Oberski, D. L., & Mulder, J. (2019). Shrinkage priors for Bayesian penalized regression. *Journal of Mathematical Psychology, 89*, 31–50

van Kesteren, E. J., & Oberski, D. L. (2019). Exploratory mediation analysis with many potential mediators. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal, 26*(5), 710–723.

Yuan, K. H., & Liu, F. (2021). Which method is more reliable in performing model modification: Lasso regularization or lagrange multiplier test? *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal, 28*(1), 69–81.

Yuan, K. H., Marshall, L. L., & Bentler, P. M. (2003). 8. Assessing the effect of model misspecifications on parameter estimates in structural equation models. *Sociological Methodology, 33*(1), 241–265.

Zhang, L., Pan, J., Dubé, L., & Ip, E. H. (2021). blcfa: An R package for Bayesian model modification in confirmatory factor analysis. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal, 28*(4), 649–658.

Zou, H., & Hastie, T. (2005). Regularization and variable selection via the elastic net. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology, 67*(2), 301–320.

Regularized Structural Equation Modeling: Balancing Exploratory and Confirmatory Analysis

Wang Siyi [1], *Deng Yating* [1], *Zhang Lijin*[2], *Zheng Shufang* [1], *Pan Junhao*[1]

([1] Department of Psychology, Sun Yat-sen University, Guangzhou, 510006)

([2] Graduate School of Education, Stanford University, Stanford, CA)

Abstract Currently, most researchers rely on confirmatory structural equation modeling (SEM) for their analyses, which involves constructing relationships between variables or constraining specific parameters based on established theory and prior knowledge. While imposing constraints on parameters can produce a simple and interpretable model, excessive constraints may lead to model misspecification due to the inherent complexity of human behavior, potentially resulting in poor model fit and biased parameter estimates. The lack of theoretical support in new research domains also hinders the effectiveness of confirmatory SEM. Thus, researchers should consider adopting a data-driven approach to identify models that better fit the data. Data-driven exploratory approaches are associated with a high risk of Type I errors, making them prone to including redundant parameters in the model. Regularized SEM not only supports the exploratory process but also delivers a simpler model with a good fit.

In this study, we summarized the value and methods of regularized SEM, including frequentist and Bayesian regularized SEM. First, we reviewed frequentist approaches to regularized SEM. We introduced various regularization methods, including Ridge, Lasso, and Elastic Net. We also listed the penalty functions of commonly used regularization methods in Appendix 1. Additionally, we summarized the applications of frequentist regularized SEM in exploratory factor analysis, mediating model, MIMIC model, and multi-group model. We then discussed Bayesian regularization with shrinkage priors (see Appendix 2 for details), outlining their developments and applications in factor analysis, measurement invariance across time or groups, and variable selection. Second, we compared the advantages and disadvantages of frequentist and Bayesian SEM. Compared to frequentist regularization methods, Bayesian regularization offers several benefits in SEM: (1) It allows for effective standard error estimation and interval estimation of parameters; (2) It provides greater modeling flexibility by relaxing certain constraints imposed by frequentist methods; (3) It performs better in complex models, reducing non-convergence issues; (4) It allows the direct application of hyperpriors to tuning parameters, avoiding cumbersome cross-validation processes. Some researchers have argued that frequentist regularization methods were preferable for simple models, as these methods demonstrated superior performance and required fewer computational resources. It should be noted that the performance of some Bayesian regularization shrinkage priors in variable selection and parameter estimation can be influenced by the choice of priors, and there is currently no consensus on the specific settings of these priors. In contrast, the adjustment parameter λ in frequentist approaches can be selected based on objective criteria, thus avoiding the subjectivity of prior selection in Bayesian regularization. Finally, we discussed the advantages of applying regularized SEM: (1) regularized SEM enhances the reproducibility of psychological research by improving generalization; (2) it effectively balances exploratory and confirmatory methods, making it particularly valuable for scale development.; (3) it performs dimensionality reduction on high-dimensional data, simplifying variable sets and identifying statistically significant variables. Moreover, if researchers want to focus on both the presence of the effect and the magnitude of the effect during the exploratory phase, they can refer to the logic of relaxed Lasso in XMed. In the first stage, regularization can be employed for model selection, while in the second stage, traditional methods can be used to obtain parameter estimates. Regularized SEM also provides a novel approach to model selection by enabling model refinement and variable selection through parameter shrinkage, rather than relying solely on traditional evaluation metrics. However, it remains unclear whether parameter shrinkage methods are superior or inferior to traditional approaches. Notably, researchers should be aware of the bias-variance trade-off when using the regularization methods. We have also compiled a list of currently available software and packages for implementing regularized SEM in Appendix 3. We hope to advance the application of regularized SEM in psychological research.

Key words bayesian regularization, frequentist regularization, regularization, structural equation modeling